Conatus Euclidæi axiomatis XII probandi antiqui,

quos

Venia Ampl. Facult. Philos.

publico examini,

Præside

Mag. CAROL. JOH. Ds HILL,

Math. Prof. Reg. et Ord.

lauream ambiens submittit

ELIS MAUR. ULLMAN,

Philos. Cand. Gothob.

In Lyceo Carol. die XV Jun. MDCCCXLIV.

P. V.

Lundæ,
typis Berlingianis.
MDCCCXLIV.

Jam igitur faciamus $BF = AB$, jungamusque CB, eruntque triangula $\overline{\dot{A}BC} \backsim \overline{F\dot{B}C}$ ex 1: 4 congruentia, quare ang. $BCF = ACB = \frac{1}{2} AC\delta$, quare CF in $C\delta$ cadit, atque igitur totus ACF alter datorum est, cujus ideo crus FC crus AB complementi in F tangit. Quoniam vero alter angulus datus EAC minor est ipso CAB dimidii complemento, suum crus EA necessario inter CA et BA cadit, ideoque satis productum illi FC occurrit. *Q. E. D.*

Cor. Facto ACF = recto, fit limes CAB complementum semirecti BCA; unde cor. præc. etiam elicitur.

Schol. Quamquam varia circa has demonstrationes objici posse noverimus, hæc tamen tanti haud sunt ponderis, ut neges Axioma ultimum Euclidis tum saltem valere, cum angulorum internorum alter rectus alterque quam minimus fuerit. Quod et ita corroborare licet. Sit EAG minor quidam ejusmodi angulus, e cujus cruris alterius puncto E normalis erigenda sit alterum tangens. Producamus AE in H, ut $EH = AE$ sit, et ex H demittamus HG perpendicularem in AG, jamque angulus EAG tam parvus sit, ut minor sit suo complemento, nempe angulo H, ideoque latus GH minor latere AG. Quæ cum ita sint, ang. HEG necessario minor erit angulo contiguo AEG (1: 25), quare hic obtusus erit, ideoque normalis in AE ex E educta intra triangulum AEG cadat, satisque (ex post. 2.) producta necessario inde per AG egrediatur, cum reliqua latera rursum secare nequeat (Ax. 10). — Hujusmodi vero anguli H limes is est, quo anguli H et HAG æquales fiunt, isque postmodum semirectus invenietur.

Schol. Axiomatis igitur ultimi hos casus probavimus,

1) cum anguli interni minus $1\frac{2}{3} R$ efficiunt,

2) cum eorundem summa $< 1\frac{1}{2} R$, (alterutro scilicet recto posito, quod semper licet),

3) cum unus internus (α) cum dimidio β alterius (2β) recto minor fuerit, seu $\alpha + \beta < R$. (Hi vero anguli adhuc sub forma indeterminata occurrunt).

Hoc quidem casu, si angulus α quam minimus fuerit, internorum summa ad duos rectos proxime accedet, nempe $\alpha + 2\beta < 2R - \alpha$, quia $\alpha + \beta < R$, sicuti axioma præscribit.

Varios igitur casus speciales axiomatis Euclidæi probare licuit. Totius vero probatio directa maximis premitur difficultatibus, ut ex sequentibus videas conatibus, quorum successum integrum haud prædicamus.

C. Conatus Euclidæum Axioma probandi.

a) ab principio rationis sufficientis petitus alter. *(Primum p. 18 indicatum videas).*

Axioma (Fig. 6.) Angulus externus $A(=EAC)$, externe positus angulum F interne positum haud superat, si ipsorum crura quousque lubet ad partem utriusque anguli protracta nusquam concurrunt. Quod idem valet, si vel alterutrum crus utrisque commune fuerit, altero alteri haud occurrente. Tum enim $F(=EBD)$ totus intra BAC jacet, nihilotamen minus vulgo externus dicitur. Quo quidem casu ita exprimatur

Axioma: Angulus externus (B) parallelarum internum BaC seu A haud excedit.

Revera enim ille (B) totus et tantus ubique intra limites (seu latera) hujus BaC cadit; quare nulla adest causa sufficiens, cur externus internum superaret, (quæ vero ex. Pr. XVI adesset, si lineæ alicubi concurrerent).

Schol. Si parallelæ non essent lineæ BD, aC, sed alicubi concurrerent, nempe a parte angulorum A et B, si ita placet, ut horum latera BD, AC cum transversali AB Triangulum ABC constituant; excederet sane angulus externus (B) internum (A) ex Pr. XVI. Idque semper valeret, quamdiu vel minimum lineœ convergerent. Sin vero ab altera parte concurrerent; angulorum contigui vel suplementa ad $\pi(=2R)$ $\beta(=\pi-B)$ et $\alpha(=\pi-A)$ Triangulo cuidam latera suppeditarent, ideoque foret β major ipso α, atque igitur $(\pi-B>\pi-A$ seu$)$ $B<A$, seu externus (B) haud excederet internum (A), nedum huic æqualis foret, sed minor. Hoc igitur casu A excedit ipsum B, ut igitur quoties lineæ non sunt parallelæ, alter horum angulorum alterum semper excedat. Sed alia omnino ratio parallelarum, ac non parallelarum,

sit; ideoque si lineæ parallelæ sunt, neuter horum angulorum alterum excedere potest, sed externus (B) = interno (A) æqualis necessario sit. Sed ad hoc luculentius demonstrandum præcedens tantum axioma minoris ambitus admittimus.

Theor. Parallelarum AC, BD anguli alterni a et b sibi ipsis similes sunt; itemque externus β æqualis $=$ interno a.
(Fig. 6.)

Quoniam enim AC ipsi BD haud occurrit (utut huic parallela), angulus α ambientem b haud superat, (per Ax. pr.) neque magis β ipsum a, intra cujus crura hic totus jacet, excedit. Sunt vero a et α, sicuti b et β sibi ipsis verticales ideoque æquales, nempe $a = \alpha$ et $b = \beta$. Haud igitur $a (= \alpha)$ ipsum b superat, neque magis $b (= \beta)$ ipsum a superat. Quoniam igitur neque $a > b$ neque $a < b$ sit, necessario $a = b$ erit. Simul vero aperte fit $\beta = a$, quia uterque $= b$ est. *Q. E. D.*

(Hæc fere ad mentem anonymi in Gerg. ann. Math. T. XV: 82 breviter indicatam).

Aliter. Si angulus ad parallelas AC, BD exterior α interiorem b superaret, eadem de causa exterior β interiorem a superaret. Omnia enim utrimque (dextrorsum atque sinistrorsum) æque se habent, ideoque nulla subit causa, cur aliter ab hac quam ab illa parte res se haberet. Sit igitur, si fieri potest, $\alpha > b$ atque similiter $\beta > a$. Est vero $\alpha = a$, atque $\beta = b$, quare foret tum $a > b$ tum ($b > a$ seu) $a < b$, quod quidem absurdum est. Sit igitur necessario $a = b$. — Neque vero melius tibi constares, si contenderes, interiorem b exteriorem α superare; quia tum simul admitteres interiorem a exteriorem β superare. Sit enim, si liceret, tum $b > \alpha$, tum $a > \beta$; foretque, quia (1:15) $b = \beta$ et $a = \alpha$, tum $\beta > \alpha$ tum $\alpha > \beta$; quod aperte absurdum est. Necessario igitur sit $\beta = \alpha$, seu $b = \alpha$, nempe internus b externo α æqualis.

Schol. Ita revera rem principio rationis sufficientis superstruximus. Causam vero cum effectu Geometria alias haud admittit. Nec igitur hujusmodi ratiocinium magis hoc in momento admittendum videtur. Attamen hæc probatio et maxime

elementaris et concinna videtur; præsertim si axioma præcedens præmittitur, quod Geometricis magis accedit, præcipue illi ax. 9, sub quo tamen vix sumitur, nisi spatii infiniti considerationem quandam admiseris. Et quidem sequentem in modum.

Theor. Si angulus $ABC > \alpha\beta\gamma$, sector $ABC >$ sectore $\alpha\beta\gamma$ erit, si (Fig. 7.) radii $AB = \alpha\beta$ æquales sunt.

Fac enim angulum $ABA' = \alpha\beta\gamma$, cadetque $A'B$ inter AB et BC, ideoque erit sector $ABC > ABA'$, qui $= \alpha\beta\gamma$, quia hi invicem sibi superponi possunt.

Cor. Quoniam hoc aperte valet, radio alterutro AB, $\alpha\beta$ exsistente quocunque, idem etiam valebit, radio exsistente quam maximo, quin imo infinito; quo casu sectorum loco habebuntur spatia infinita inter crura angulorum comprehensa, quæ ideo aliquam angulorum teneant rationem, ita ut angulo ABC exsistente $> \alpha\beta\gamma$, etiam spatium $ABC > \alpha\beta\gamma$ sit, vel saltem spatium $ABC : \alpha\beta\gamma > 1$. Et viceversa.

Cor. Hinc igitur colligi videtur, angulorum æqualium spatia infinita esse æqualia, et vice versa; majori vero spatio majorem attinere angulum, et vice versa. Cum igitur anguli ad parallelas exterioris totum spatium intra spatium interioris cadat, ille hoc minor videtur, sed in axiomate tantum admisimus, illum hunc haud superare. Caute enim de infinitis statuendum. Quare etiam infiniti considerationem Geometræ rejiciendam censerunt.

Aliter. Quoniam parallelæ nusquam concurrunt, ideoque triangulum cum transversali quadam haud constituunt, a hujus lateribus qua in re differant. Latera vero angulos ad basin seu internos minores duobus rectis efficiunt; ergo anguli interni parallelarum non minores duobus rectis sunt, idque neutra parte. Sint vero (Fig. 6.) ab altera a et B, ab altera A et b atque a et A contigui, sicuti b et B. Erit igitur $a + B$ vel $=$ vel $>$ $2 . R$

itemque $A + b$ vel $=$ vel $>$ $2 . R$, junctim igitur erunt $a + B + A + b$

vel $=$ vel $> 2R + 2R$. Sed $a + A = 2R$ et $B + b = 2R$ (ex 1: 13), ideoque $a + A + B + b = 2R + 2R$; ergo signum $>$ haud valet, ideoque necessario sit anguli interni $a + B = 2R$. Quare Eucl. Pr. 29 constat, indeque Ax. XII facile probatur.

Schol. Sin vero neutra harum explicationum tibi satis arridet, hoc saltem admittas

Theorema. Si angulus externus parallelarum interno minor haud fu-
(Fig. 6.) erit, hi æquales erunt.

Quoniam enim externus α haud minor est ipso interno b, eadem de causa, quia parallelæ utrimque æque se habent, erit externus β haud minor interno a. Sed (1: 15) externus $\beta =$ verticali b est æqualis, itemque $a = \alpha$; igitur internus b haud est minor externo α. Sed etiam ponebatur α haud minor ipso b, seu b haud major ipso α. Quoniam igitur internus b neque est minor neque major ipso externo α, necessario sit internus b æqualis externo α. *Q. E. D.*

Cor. Hinc vero facile (in modum Euclidis) concludes, alternos parallelorum angulos esse æquales, internosque duos rectos conficere.

Schol. Singulare quidem tibi videatur, quod heic ex hypothesi egredientes, axiomati præcedente omnino contraria, ad eandem conclusionem pervenerimus. Quin imo utraque hypothesis contraria tibi videatur, ideoque rejicienda. Sed observes, in parallelis distinctionem inter angulos externum et internum minus valere, sed ex prop. XV eum, qui modo internus erat, mox externum fieri. Quin imo totam rem brevissime ita expedias, ut dixeris, neutro angulo vero externo exsistente sed eodem etiam interno, nullum verum externum interno majorem ad parallelas dari, ideoque utrosque interne oppositos seu alternos necessario æquales fore. Hujusmodi itaque probatio populari, quin forsan philosopho sufficiat; Geometra vero diligentiorem exigit.

b) ex maximi vel infiniti notione. (alium v. p. 19).

Theorema 1. Omnium per C transeuntium linearum unica CD', ea (Fig. 1). quæ externum angulum $FCD' = $ interno DAC æqualem facit, ipsi AD haud occurrit.

Si enim aliqua alia GC ipsi AD haud occureret, nulla earum quæ inter GC et CD' ducuntur, ut CH, ipsi AD occurreret. Sed accepto puncto quocumque E' in AD, ducta CE' non modo AD occurrit, sed etiam angulum $E'CF$ externum interno $E'AC$ majorem habet (1: 16), omnesque lineæ inter $E'C$ et AC ductæ ipsi AD aperte occurrunt, ut CE, quæ satis producta extra triangulum $AE'C$ prodeat, idque tantum in latere AE', cum reliquis in unico tantum puncto C occurrat, succedat. Darentur igitur innumeræ lineæ ipsi AD occurentes, (nempe inter AC et $E'C$), aliæque (inter GC et CD') non occurrentes. Illarum ultima igitur aliqua sit, quæ sit $E'C$. Sed accipiamus punctum N in AE' producta, ducamusque NC, eritque aperte NC nova ipsi AD occurrens, eaque, cum in $E'C$ contra Ax. X cadere nequeat, extra ultimam $E'C$ sita erit; quod absurdum est. Nulla igitur ejusmodi ultima datur, sicuti in linea AD ultimum quoddam punctum exhibere haud licet. Neque igitur innumeræ dantur, quæ non occurrunt ipsi AD, sed unica CD' datur, quæ ex 1: 28 huic non occurrit.

Cor. Quæcunque igitur linea HC, quæ externum angulum HCF interno DAC majorem facit, ipsi AD occurrit. (= Eucl. Ax. XII.). Hæc enim ab illa unica $D'C$ est diversa, cum hac angulum faciens HCD'. (Hæc fere ad mentem D:n Olivier, in Crelles Journ. 1: 151. explicatam, proposuimus).

Schol. Si contenderes, lineam CN in ultima CE' cadere, his lineis unam partem communem $E'N$ tribueres, rursumque axiomati X contradiceres. Potius ultimam versus N ipsi AN occurrentem dicas ipsam lineam CD', quæ quidem in nulla distantia finita occurrit ipsi AD, ut Eucl. Pr. 27 et 16. bene ostendit; minime vero pro

certo statui potest, ipsam haud ad distantiam infinitam illi occurrere, cum analysis contrarium fere arguat, ut idem sit ad hanc distantiam occurrere, ac non occurrere, quorum contrarietas se ipsam tollit. Quod si admiseris, finxerisque, parallelas cum transversali constituere triangulum apice ab hac infinite dissito gaudens, facile prop. 29 ad modum pr. 16 demonstres.

Fig. 8. Sint nempe B^0A et $B'C$ parallelæ, ab incidente AC transversim sectæ, quæ in puncto $B(=B^0=B')$ infinite ab AC dissito sibi invicem occurrunt, bisecemusque AC in E, producamusque BE infinite ad F, quod ideo sit punctum ab altera parte infinite dissitum, eritque BEF ipsi $B'CD$ parallela, cum huic haud nisi ad distantiam infinitam occurrat. Quæ cum ita sint, ducta CF ab ipsa CD situ differre nequit, sed hæ eadem omnino sint. Quoniam igitur in triangulis (fictis) BEA et FEC duo latera $AE=EC$ et $BE=EF=\infty$ cum angulo intermedio E verticali æqualia fecimus, erunt (1: 4) anguli A et ACF seu B^0AE et DCE alterni æquales. *Q. E. D.*

Schol. Sed hæc demonstratio, Prop. 4 ultra debitos limites adhibens, nimis ab methodo Euclidæa abhorrere videtur, hocque habet incongruum, quod, rectas EF, CD utrimque sese tangentes faciens, axiomati X adversetur; Duplex vero ejusmodi concursus dubitationi tanto magis obnoxius sit, quanto major distantia AC fuerit (ex. gr. ipsi solis a terra æqualis). Simili vero dubio demonstratio præcedens laborat, cum distantia $E'D'$ una cum AC quam maxima evadat, multumque dubitari possit, num recta CE' per angulum quam minimum (quin imo infinite parvum) tantam circa punctum C mota peragret distantiam. Vides igitur, quibus difficultatibus hæc laboret theoria.

Schol. 3. Si vero parallelæ cum transversali ut triangulum considerare possent, ideoque prop. 4 vel 26 Eucl. ad parallelas extendere liceret, res in promptu foret. Sint enim AC et BC parallelarum par ad distantiam infinitam in C quasi concurrens; atque $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$ simile par, gaudeantque hæc paria æquali transversali $AB=\alpha\beta$, æqualique angulo $A=\alpha$, contendimusque alterum angulum $ABD=b=\beta$ utrobique æqualem fore. Fig. 6.

Vel enim latera infinita AC et $\alpha\gamma$ æqualia ponere licet, ideoque Prop. IV adhibere, vel etiam angulos C et γ æquales censere, cum vel nulli sint vel certe dato quovis minores fiant (ut postmodum ostendemus), ideoque Prop. XXVI in usum vocare licet. Hanc extensionem si admiseris, theoria connormalium facile expediatur, ut postmodum videbis, vel etiam theoriam ex principio rationis sufficientis antea expositam (p. 18) novo munias fundamento.

Theorema 2. Sed hoc saltem autumare licet, reliquos angulos b (Fig. 6.) et β parallelarum ejusmodi parium, communi latere et angulo gaudentium, angulo quovis dato minus differre.

Quod sequenti modo demonstretur: Primo enim exsistentibus ABC et $\alpha\beta\gamma$ veris triangulis, (æquali latere $AB = \alpha\beta$ et angulo $A = \alpha$ communi gaudentibus), contendimus secundos angulos b et β minus inter se differre, quam maximo angulorum tertiorum C et γ. Sit enim angulus $b >$ ipso β major, faciamusque $ABD' = \beta$, eruntque (1: 26) triangula $\overline{\ddot{A}\ddot{B}D'}$ et $\overline{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ congruentia, ideoque angulus $\gamma = AD'B > C$ itemque $\gamma > D'BC$ (1: 16), quare differentia hæc $D'BC$ angulorum b (seu ABC) et β minor est maximo γ angulorum C et γ, sicuti contendimus. — Deinde vero apices C et γ tam longinquos facere licet, ut anguli C et γ dato minores fiant, sicuti jam (Δ. 1. Cor. 3) ostendimus. Quare etiam differentia illa angulo dato minor erit; id, quod tanto magis de parallelis valeat, cum jam in convergentibus locum habeat.

Cor. 1. Cum vero inde lineæ tandem vix parallelæ futuræ sint, nisi apices C et γ ad distantiam infinitam rejiciantur, autumare licet in ejusmodi parallelarum paribus angulos reliquos B et β non modo angulo dato quovis minore differre, sed etiam omnino æquales esse.

Cor. 2. Linea, quæ uni parallelarum normaliter insistit, etiam alteri est (fere) perpendicularis. (Fig. 8).

Sit enim CE in CD normalis, atque CD et BE parallelæ. Figuræ $FECD$ et